

Analiza Funkcjonalna

Bartosz Kwaśniewski

Faculty of Mathematics, University of Białystok

Wykład 6

Przestrzenie Hilberta

math.uwb.edu.pl/~zaf/kwasniewski/pdf/skrypt.pdf

Def. Przestrzeń unitarną (lub też prehilbertowską) nazywamy

Def. Przestrzenią unitarną (lub też **prehilbertowską**) nazywamy przestrzeń liniową H

Def. Przestrzenią unitarną (lub też **prehilbertowską**) nazywamy przestrzeń liniową H nad $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Def. Przestrzenią unitarną (lub też **prehilbertowską**) nazywamy przestrzeń liniową H nad $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ wraz z **iloczynem skalarnym**,

Def. Przestrzeń unitarną (lub też **prehilbertowską**) nazywamy przestrzeń liniową H nad $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ wraz z **iloczynem skalarnym**, czyli funkcją $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{F}$ spełniającą

Def. Przestrzeń unitarną (lub też **prehilbertowską**) nazywamy przestrzeń liniową H nad $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ wraz z **iloczynem skalarnym**, czyli funkcją $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{F}$ spełniającą

❶ $\langle x, x \rangle \geq 0$ oraz $\langle x, x \rangle > 0$ dla $x \neq 0$ (*dodatnio-określoność*)

Def. Przestrzenią unitarną (lub też **prehilbertowską**) nazywamy przestrzeń liniową H nad $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ wraz z **iloczynem skalarnym**, czyli funkcją $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{F}$ spełniającą

- ❶ $\langle x, x \rangle \geq 0$ oraz $\langle x, x \rangle > 0$ dla $x \neq 0$ (*dodatnio-określoność*)
- ❷ $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$, (*liniowość w 1-argumencie*)

Def. Przestrzeń unitarną (lub też **prehilbertowską**) nazywamy przestrzeń liniową H nad $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ wraz z **iloczynem skalarnym**, czyli funkcją $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{F}$ spełniającą

- ❶ $\langle x, x \rangle \geq 0$ oraz $\langle x, x \rangle > 0$ dla $x \neq 0$ (*dodatnio-określoność*)
- ❷ $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$, (*liniowość w 1-argumencie*)
- ❸ $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$, (*antysymetria*)

Def. Przestrzeń unitarną (lub też **prehilbertowską**) nazywamy przestrzeń liniową H nad $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ wraz z **iloczynem skalarnym**, czyli funkcją $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{F}$ spełniającą

① $\langle x, x \rangle \geq 0$ oraz $\langle x, x \rangle > 0$ dla $x \neq 0$ (*dodatnio-określoność*)

② $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$, (*liniowość w 1-argumencie*)

③ $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$, (*antysymetria*)

dla $x, y, z \in H$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$.

Def. Przestrzeń unitarną (lub też **prehilbertowską**) nazywamy przestrzeń liniową H nad $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ wraz z **iloczynem skalarnym**, czyli funkcją $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{F}$ spełniającą

① $\langle x, x \rangle \geq 0$ oraz $\langle x, x \rangle > 0$ dla $x \neq 0$ (*dodatnio-określoność*)

② $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$, (*liniowość w 1-argumencie*)

③ $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$, (*antysymetria*)

dla $x, y, z \in H$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$.



Hilbert

Def. Przestrzeń unitarną (lub też **prehilbertowską**) nazywamy przestrzeń liniową H nad $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ wraz z **iloczynem skalarnym**, czyli funkcją $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{F}$ spełniającą

① $\langle x, x \rangle \geq 0$ oraz $\langle x, x \rangle > 0$ dla $x \neq 0$ (*dodatnio-określoność*)

② $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$, (*liniowość w 1-argumencie*)

③ $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$, (*antysymetria*)

dla $x, y, z \in H$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$.



Hilbert



von Neumann

Def. Przestrzeń unitarną (lub też **prehilbertowską**) nazywamy przestrzeń liniową H nad $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ wraz z **iloczynem skalarnym**, czyli funkcją $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{F}$ spełniającą

① $\langle x, x \rangle \geq 0$ oraz $\langle x, x \rangle > 0$ dla $x \neq 0$ (*dodatnio-określoność*)

② $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$, (*liniowość w 1-argumencie*)

③ $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$, (*antysymetria*)

dla $x, y, z \in H$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$.



Hilbert



von Neumann

Uw. Warunki (2) i (3), implikują

Def. Przestrzeń unitarną (lub też **prehilbertowską**) nazywamy przestrzeń liniową H nad $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ wraz z **iloczynem skalarnym**, czyli funkcją $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{F}$ spełniającą

① $\langle x, x \rangle \geq 0$ oraz $\langle x, x \rangle > 0$ dla $x \neq 0$ (*dodatnio-określoność*)

② $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$, (*liniowość w 1-argumencie*)

③ $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$, (*antysymetria*)

dla $x, y, z \in H$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$.



Hilbert



von Neumann

Uw. Warunki (2) i (3), implikują

$$\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle + \overline{\beta} \langle x, z \rangle \quad (\textit{antyliniowość w 2-argumencie})$$

Def. Przestrzeń unitarną (lub też **prehilbertowską**) nazywamy przestrzeń liniową H nad $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ wraz z **iloczynem skalarnym**, czyli funkcją $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{F}$ spełniającą

① $\langle x, x \rangle \geq 0$ oraz $\langle x, x \rangle > 0$ dla $x \neq 0$ (*dodatnio-określoność*)

② $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$, (*liniowość w 1-argumencie*)

③ $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$, (*antysymetria*)

dla $x, y, z \in H$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$.



Hilbert



von Neumann

Uw. Warunki (2) i (3), implikują

$$\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle + \overline{\beta} \langle x, z \rangle \quad (\textit{antyliniowość w 2-argumencie})$$

Zatem iloczyn skalarny jest **formą półtoraliniową**!

Def. Przestrzeń unitarną (lub też **prehilbertowską**) nazywamy przestrzeń liniową H nad $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ wraz z **iloczynem skalarnym**, czyli funkcją $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{F}$ spełniającą

① $\langle x, x \rangle \geq 0$ oraz $\langle x, x \rangle > 0$ dla $x \neq 0$ (dodatnio-określoność)

② $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$, (liniowość w 1-argumencie)

③ $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$, (antysymetria)

dla $x, y, z \in H$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$.



Hilbert



von Neumann

Uw. Warunki (2) i (3), implikują

$$\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle + \overline{\beta} \langle x, z \rangle \quad (\text{antyliniowość w 2-argumencie})$$

Zatem iloczyn skalarny jest **formą półtoraliniową**!

Jeśli $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, to (3)

Def. Przestrzeń unitarną (lub też **prehilbertowską**) nazywamy przestrzeń liniową H nad $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ wraz z **iloczynem skalarnym**, czyli funkcją $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{F}$ spełniającą

① $\langle x, x \rangle \geq 0$ oraz $\langle x, x \rangle > 0$ dla $x \neq 0$ (dodatnio-określoność)

② $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$, (liniowość w 1-argumencie)

③ $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$, (antysymetria)

dla $x, y, z \in H$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$.



Hilbert



von Neumann

Uw. Warunki (2) i (3), implikują

$$\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle + \overline{\beta} \langle x, z \rangle \quad (\text{antyliniowość w 2-argumencie})$$

Zatem iloczyn skalarny jest **formą półtoraliniową**!

Jeśli $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, to (3) przyjmuje postać $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.

Iloczyn skalarny

Def. Przestrzenią unitarną (lub też **prehilbertowską**) nazywamy przestrzeń liniową H nad $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ wraz z **iloczynem skalarnym**, czyli funkcją $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{F}$ spełniającą

① $\langle x, x \rangle \geq 0$ oraz $\langle x, x \rangle > 0$ dla $x \neq 0$ (*dodatnio-określoność*)

② $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$, (*liniowość w 1-argumencie*)

③ $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$, (*antysymetria*)

dla $x, y, z \in H$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$.



Hilbert



von Neumann

Uw. Warunki (2) i (3), implikują

$$\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle + \overline{\beta} \langle x, z \rangle \quad (\textit{antyliniowość w 2-argumencie})$$

Zatem iloczyn skalarny jest **formą półtoraliniową**!

Jeśli $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, to (3) przyjmuje postać $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$. Zatem rzeczywisty iloczyn skalarny $\equiv$ funkcja dwuliniowa symetryczna!

Prz1. Wzór $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x(k) \overline{y(k)}$

Prz1. Wzór $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x(k) \overline{y(k)}$ definiuje iloczyn skalarny na przestrzeni skończenie wymiarowej $H = \mathbb{F}^n$.

Prz1. Wzór $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x(k) \overline{y(k)}$ definiuje iloczyn skalarny na przestrzeni skończenie wymiarowej $H = \mathbb{F}^n$.

Prz2. Wzór $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x(k) \overline{y(k)}$

Prz1. Wzór $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x(k) \overline{y(k)}$ definiuje iloczyn skalarny na przestrzeni skończenie wymiarowej $H = \mathbb{F}^n$.

Prz2. Wzór $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x(k) \overline{y(k)}$ definiuje iloczyn skalarny na przestrzeni ciągów sumowalnych w kwadracie $H = \ell^2$.

Prz1. Wzór $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x(k) \overline{y(k)}$ definiuje iloczyn skalarny na przestrzeni skończonej wymiarowej $H = \mathbb{F}^n$.

Prz2. Wzór $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x(k) \overline{y(k)}$ definiuje iloczyn skalarny na przestrzeni ciągów sumowalnych w kwadracie $H = \ell^2$.

Prz3. Wzór $\langle x, y \rangle = \int_{\Omega} x(t) \cdot \overline{y(t)} d\mu$

Prz1. Wzór $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x(k) \overline{y(k)}$ definiuje iloczyn skalarny na przestrzeni skończenie wymiarowej $H = \mathbb{F}^n$.

Prz2. Wzór $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x(k) \overline{y(k)}$ definiuje iloczyn skalarny na przestrzeni ciągów sumowalnych w kwadracie $H = \ell^2$.

Prz3. Wzór $\langle x, y \rangle = \int_{\Omega} x(t) \cdot \overline{y(t)} d\mu$ definiuje iloczyn skalarny na przestrzeni funkcji całkowalnych w kwadracie $H = L^2(\mu)$.

Prz1. Wzór $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x(k) \overline{y(k)}$ definiuje iloczyn skalarny na przestrzeni skończenie wymiarowej $H = \mathbb{F}^n$.

Prz2. Wzór $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x(k) \overline{y(k)}$ definiuje iloczyn skalarny na przestrzeni ciągów sumowalnych w kwadracie $H = \ell^2$.

Prz3. Wzór $\langle x, y \rangle = \int_{\Omega} x(t) \cdot \overline{y(t)} d\mu$ definiuje iloczyn skalarny na przestrzeni funkcji całkowalnych w kwadracie $H = L^2(\mu)$.

Uw. Nierówność Höldera dla $p = q = 2$, czyli

Prz1. Wzór $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x(k) \overline{y(k)}$ definiuje iloczyn skalarny na przestrzeni skończenie wymiarowej $H = \mathbb{F}^n$.

Prz2. Wzór $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x(k) \overline{y(k)}$ definiuje iloczyn skalarny na przestrzeni ciągów sumowalnych w kwadracie $H = \ell^2$.

Prz3. Wzór $\langle x, y \rangle = \int_{\Omega} x(t) \cdot \overline{y(t)} d\mu$ definiuje iloczyn skalarny na przestrzeni funkcji całkowalnych w kwadracie $H = L^2(\mu)$.

Uw. Nierówność Höldera dla $p = q = 2$, czyli

$$\int_{\Omega} |x(t)y(t)| d\mu \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2,$$

Prz1. Wzór $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x(k) \overline{y(k)}$ definiuje iloczyn skalarny na przestrzeni skończenie wymiarowej $H = \mathbb{F}^n$.

Prz2. Wzór $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x(k) \overline{y(k)}$ definiuje iloczyn skalarny na przestrzeni ciągów sumowalnych w kwadracie $H = \ell^2$.

Prz3. Wzór $\langle x, y \rangle = \int_{\Omega} x(t) \cdot \overline{y(t)} d\mu$ definiuje iloczyn skalarny na przestrzeni funkcji całkowalnych w kwadracie $H = L^2(\mu)$.

Uw. Nierówność Höldera dla $p = q = 2$, czyli

$$\int_{\Omega} |x(t)y(t)| d\mu \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2,$$

zwana również **nierównością Schwartz**,

Prz1. Wzór $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x(k) \overline{y(k)}$ definiuje iloczyn skalarny na przestrzeni skończenie wymiarowej $H = \mathbb{F}^n$.

Prz2. Wzór $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x(k) \overline{y(k)}$ definiuje iloczyn skalarny na przestrzeni ciągów sumowalnych w kwadracie $H = \ell^2$.

Prz3. Wzór $\langle x, y \rangle = \int_{\Omega} x(t) \cdot \overline{y(t)} d\mu$ definiuje iloczyn skalarny na przestrzeni funkcji całkowalnych w kwadracie $H = L^2(\mu)$.

Uw. Nierówność Höldera dla $p = q = 2$, czyli

$$\int_{\Omega} |x(t)y(t)| d\mu \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2,$$

zwana również **nierównością Schwartza**, gwarantuje że iloczyn skalarny na $L^2(\mu)$ jest poprawnie określony

Prz1. Wzór $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x(k) \overline{y(k)}$ definiuje iloczyn skalarny na przestrzeni skończenie wymiarowej $H = \mathbb{F}^n$.

Prz2. Wzór $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x(k) \overline{y(k)}$ definiuje iloczyn skalarny na przestrzeni ciągów sumowalnych w kwadracie $H = \ell^2$.

Prz3. Wzór $\langle x, y \rangle = \int_{\Omega} x(t) \cdot \overline{y(t)} d\mu$ definiuje iloczyn skalarny na przestrzeni funkcji całkowalnych w kwadracie $H = L^2(\mu)$.

Uw. Nierówność Höldera dla $p = q = 2$, czyli

$$\int_{\Omega} |x(t)y(t)| d\mu \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2,$$

zwana również **nierównością Schwartza**, gwarantuje że iloczyn skalarny na $L^2(\mu)$ jest poprawnie określony :

$$x, y \in L^2(\mu) \Rightarrow x \cdot \overline{y} \in L^1(\mu).$$

Prz1. Wzór $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x(k) \overline{y(k)}$ definiuje iloczyn skalarny na przestrzeni skończenie wymiarowej $H = \mathbb{F}^n$.

Prz2. Wzór $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x(k) \overline{y(k)}$ definiuje iloczyn skalarny na przestrzeni ciągów sumowalnych w kwadracie $H = \ell^2$.

Prz3. Wzór $\langle x, y \rangle = \int_{\Omega} x(t) \cdot \overline{y(t)} d\mu$ definiuje iloczyn skalarny na przestrzeni funkcji całkowalnych w kwadracie $H = L^2(\mu)$.

Uw. Nierówność Höldera dla $p = q = 2$, czyli

$$\int_{\Omega} |x(t)y(t)| d\mu \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2,$$

zwana również **nierównością Schwartz**a, gwarantuje że iloczyn skalarny na $L^2(\mu)$ jest poprawnie określony :

$x, y \in L^2(\mu) \Rightarrow x \cdot \bar{y} \in L^1(\mu)$. Zauważmy, że

$$\|x\|_2 =$$

Prz1. Wzór $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x(k) \overline{y(k)}$ definiuje iloczyn skalarny na przestrzeni skończonej wymiarowej $H = \mathbb{F}^n$.

Prz2. Wzór $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x(k) \overline{y(k)}$ definiuje iloczyn skalarny na przestrzeni ciągów sumowalnych w kwadracie $H = \ell^2$.

Prz3. Wzór $\langle x, y \rangle = \int_{\Omega} x(t) \cdot \overline{y(t)} d\mu$ definiuje iloczyn skalarny na przestrzeni funkcji całkowalnych w kwadracie $H = L^2(\mu)$.

Uw. Nierówność Höldera dla $p = q = 2$, czyli

$$\int_{\Omega} |x(t)y(t)| d\mu \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2,$$

zwana również **nierównością Schwartza**, gwarantuje że iloczyn skalarny na $L^2(\mu)$ jest poprawnie określony :

$x, y \in L^2(\mu) \Rightarrow x \cdot \bar{y} \in L^1(\mu)$. Zauważmy, że

$$\|x\|_2 = \left(\int_{\Omega} |x(t)|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} =$$

Prz1. Wzór $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x(k) \overline{y(k)}$ definiuje iloczyn skalarny na przestrzeni skończonej wymiarowej $H = \mathbb{F}^n$.

Prz2. Wzór $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x(k) \overline{y(k)}$ definiuje iloczyn skalarny na przestrzeni ciągów sumowalnych w kwadracie $H = \ell^2$.

Prz3. Wzór $\langle x, y \rangle = \int_{\Omega} x(t) \cdot \overline{y(t)} d\mu$ definiuje iloczyn skalarny na przestrzeni funkcji całkowalnych w kwadracie $H = L^2(\mu)$.

Uw. Nierówność Höldera dla $p = q = 2$, czyli

$$\int_{\Omega} |x(t)y(t)| d\mu \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2,$$

zwana również **nierównością Schwartz**a, gwarantuje że iloczyn skalarny na $L^2(\mu)$ jest poprawnie określony :

$x, y \in L^2(\mu) \Rightarrow x \cdot \bar{y} \in L^1(\mu)$. Zauważmy, że

$$\|x\|_2 = \left(\int_{\Omega} |x(t)|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Def. Normę elementu x w przestrzeni unitarnej H

Def. Normę elementu x w przestrzeni unitarnej H definiujemy wzorem

Def. Normę elementu x w przestrzeni unitarnej H definiujemy wzorem

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Def. Normę elementu x w przestrzeni unitarnej H definiujemy wzorem

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Lem. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2$

Def. Normę elementu x w przestrzeni unitarnej H definiujemy wzorem

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Lem. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2$

“Uogólniony wzór skróconego mnożenia”

Def. Normę elementu x w przestrzeni unitarnej H definiujemy wzorem

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Lem. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2$ dla $x, y \in H$

“Uogólniony wzór skróconego mnożenia”

Def. Normę elementu x w przestrzeni unitarnej H definiujemy wzorem

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Lem. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2$ dla $x, y \in H$

“Uogólniony wzór skróconego mnożenia”



Def. Normę elementu x w przestrzeni unitarnej H definiujemy wzorem

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Lem. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2$ dla $x, y \in H$



“Uogólniony wzór skróconego mnożenia”

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Def. Normę elementu x w przestrzeni unitarnej H definiujemy wzorem

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Lem. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2$ dla $x, y \in H$

“Uogólniony wzór skróconego mnożenia”



$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Tw. (Nierówność Schwartza)

Def. Normę elementu x w przestrzeni unitarnej H definiujemy wzorem

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Lem. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re}\langle x, y \rangle + \|y\|^2$ dla $x, y \in H$

“Uogólniony wzór skróconego mnożenia”



$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Tw. (Nierówność Schwartza)

Dla dowolnych wektorów x, y przestrzeni unitarnej zachodzi

Def. Normę elementu x w przestrzeni unitarnej H definiujemy wzorem

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Lem. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2$ dla $x, y \in H$

“Uogólniony wzór skróconego mnożenia”



$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Tw. (Nierówność Schwartza)

Dla dowolnych wektorów x, y przestrzeni unitarnej zachodzi

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Def. Normę elementu x w przestrzeni unitarnej H definiujemy wzorem

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Lem. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2$ dla $x, y \in H$

“Uogólniony wzór skróconego mnożenia”



$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Tw. (Nierówność Schwartza)

Dla dowolnych wektorów x, y przestrzeni unitarnej zachodzi

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Dowód:

Def. Normę elementu x w przestrzeni unitarnej H definiujemy wzorem

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Lem. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2$ dla $x, y \in H$



“Uogólniony wzór skróconego mnożenia”

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Tw. (Nierówność Schwartza)

Dla dowolnych wektorów x, y przestrzeni unitarnej zachodzi

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Dowód: Niech $\lambda \in \mathbb{F}$ takie, że $|\langle x, y \rangle| = \lambda \cdot \langle x, y \rangle$ oraz $|\lambda| = 1$

Def. Normę elementu x w przestrzeni unitarnej H definiujemy wzorem

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Lem. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2$ dla $x, y \in H$



“Uogólniony wzór skróconego mnożenia”

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Tw. (Nierówność Schwartza)

Dla dowolnych wektorów x, y przestrzeni unitarnej zachodzi

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Dowód: Niech $\lambda \in \mathbb{F}$ takie, że $|\langle x, y \rangle| = \lambda \cdot \langle x, y \rangle$ oraz $|\lambda| = 1$
($\lambda = e^{-i \arg \langle x, y \rangle}$).

Def. Normę elementu x w przestrzeni unitarnej H definiujemy wzorem

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Lem. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2$ dla $x, y \in H$



“Uogólniony wzór skróconego mnożenia”

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Tw. (Nierówność Schwartza)

Dla dowolnych wektorów x, y przestrzeni unitarnej zachodzi

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Dowód: Niech $\lambda \in \mathbb{F}$ takie, że $|\langle x, y \rangle| = \lambda \cdot \langle x, y \rangle$ oraz $|\lambda| = 1$ ($\lambda = e^{-i \arg \langle x, y \rangle}$). Dla każdego $t \in \mathbb{R}$ mamy

Def. Normę elementu x w przestrzeni unitarnej H definiujemy wzorem

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Lem. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2$ dla $x, y \in H$



“Uogólniony wzór skróconego mnożenia”

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Tw. (Nierówność Schwartza)

Dla dowolnych wektorów x, y przestrzeni unitarnej zachodzi

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Dowód: Niech $\lambda \in \mathbb{F}$ takie, że $|\langle x, y \rangle| = \lambda \cdot \langle x, y \rangle$ oraz $|\lambda| = 1$ ($\lambda = e^{-i \arg \langle x, y \rangle}$). Dla każdego $t \in \mathbb{R}$ mamy

$$0 \leq \langle t\lambda x + y, t\lambda x + y \rangle$$

Def. Normę elementu x w przestrzeni unitarnej H definiujemy wzorem

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Lem. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2$ dla $x, y \in H$



“Uogólniony wzór skróconego mnożenia”

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Tw. (Nierówność Schwartza)

Dla dowolnych wektorów x, y przestrzeni unitarnej zachodzi

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Dowód: Niech $\lambda \in \mathbb{F}$ takie, że $|\langle x, y \rangle| = \lambda \cdot \langle x, y \rangle$ oraz $|\lambda| = 1$ ($\lambda = e^{-i \arg \langle x, y \rangle}$). Dla każdego $t \in \mathbb{R}$ mamy

$$0 \leq \langle t\lambda x + y, t\lambda x + y \rangle = \|t\lambda x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle t\lambda x, y \rangle + \|y\|^2$$

Def. Normę elementu x w przestrzeni unitarnej H definiujemy wzorem

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Lem. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2$ dla $x, y \in H$



“Uogólniony wzór skróconego mnożenia”

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Tw. (Nierówność Schwartza)

Dla dowolnych wektorów x, y przestrzeni unitarnej zachodzi

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Dowód: Niech $\lambda \in \mathbb{F}$ takie, że $|\langle x, y \rangle| = \lambda \cdot \langle x, y \rangle$ oraz $|\lambda| = 1$ ($\lambda = e^{-i \arg \langle x, y \rangle}$). Dla każdego $t \in \mathbb{R}$ mamy

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle t\lambda x + y, t\lambda x + y \rangle &= \|t\lambda x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle t\lambda x, y \rangle + \|y\|^2 \\ &= t^2 \|x\|^2 + 2t |\langle x, y \rangle| + \|y\|^2. \end{aligned}$$

Def. Normę elementu x w przestrzeni unitarnej H definiujemy wzorem

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Lem. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2$ dla $x, y \in H$



“Uogólniony wzór skróconego mnożenia”

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Tw. (Nierówność Schwartza)

Dla dowolnych wektorów x, y przestrzeni unitarnej zachodzi

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Dowód: Niech $\lambda \in \mathbb{F}$ takie, że $|\langle x, y \rangle| = \lambda \cdot \langle x, y \rangle$ oraz $|\lambda| = 1$ ($\lambda = e^{-i \arg \langle x, y \rangle}$). Dla każdego $t \in \mathbb{R}$ mamy

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle t\lambda x + y, t\lambda x + y \rangle &= \|t\lambda x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle t\lambda x, y \rangle + \|y\|^2 \\ &= t^2 \|x\|^2 + 2t |\langle x, y \rangle| + \|y\|^2. \end{aligned}$$

Zatem funkcja $f(t) := t^2 \|x\|^2 + 2t |\langle x, y \rangle| + \|y\|^2$

Def. Normę elementu x w przestrzeni unitarnej H definiujemy wzorem

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Lem. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2$ dla $x, y \in H$



“Uogólniony wzór skróconego mnożenia”

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Tw. (Nierówność Schwartz)

Dla dowolnych wektorów x, y przestrzeni unitarnej zachodzi

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Dowód: Niech $\lambda \in \mathbb{F}$ takie, że $|\langle x, y \rangle| = \lambda \cdot \langle x, y \rangle$ oraz $|\lambda| = 1$ ($\lambda = e^{-i \arg \langle x, y \rangle}$). Dla każdego $t \in \mathbb{R}$ mamy

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle t\lambda x + y, t\lambda x + y \rangle = \|t\lambda x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle t\lambda x, y \rangle + \|y\|^2 \\ &= t^2 \|x\|^2 + 2t |\langle x, y \rangle| + \|y\|^2. \end{aligned}$$

Zatem funkcja $f(t) := t^2 \|x\|^2 + 2t |\langle x, y \rangle| + \|y\|^2$ jest nieujemna.

Def. Normę elementu x w przestrzeni unitarnej H definiujemy wzorem

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Lem. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2$ dla $x, y \in H$



“Uogólniony wzór skróconego mnożenia”

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Tw. (Nierówność Schwartza)

Dla dowolnych wektorów x, y przestrzeni unitarnej zachodzi

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Dowód: Niech $\lambda \in \mathbb{F}$ takie, że $|\langle x, y \rangle| = \lambda \cdot \langle x, y \rangle$ oraz $|\lambda| = 1$ ($\lambda = e^{-i \arg \langle x, y \rangle}$). Dla każdego $t \in \mathbb{R}$ mamy

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle t\lambda x + y, t\lambda x + y \rangle &= \|t\lambda x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle t\lambda x, y \rangle + \|y\|^2 \\ &= t^2 \|x\|^2 + 2t |\langle x, y \rangle| + \|y\|^2. \end{aligned}$$

Zatem funkcja $f(t) := t^2 \|x\|^2 + 2t |\langle x, y \rangle| + \|y\|^2$ jest nieujemna.

Czyli jej wyróżnik jest niedodatni:

Def. Normę elementu x w przestrzeni unitarnej H definiujemy wzorem

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Lem. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2$ dla $x, y \in H$



“Uogólniony wzór skróconego mnożenia”

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Tw. (Nierówność Schwartza)

Dla dowolnych wektorów x, y przestrzeni unitarnej zachodzi

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Dowód: Niech $\lambda \in \mathbb{F}$ takie, że $|\langle x, y \rangle| = \lambda \cdot \langle x, y \rangle$ oraz $|\lambda| = 1$ ($\lambda = e^{-i \arg \langle x, y \rangle}$). Dla każdego $t \in \mathbb{R}$ mamy

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle t\lambda x + y, t\lambda x + y \rangle &= \|t\lambda x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle t\lambda x, y \rangle + \|y\|^2 \\ &= t^2 \|x\|^2 + 2t |\langle x, y \rangle| + \|y\|^2. \end{aligned}$$

Zatem funkcja $f(t) := t^2 \|x\|^2 + 2t |\langle x, y \rangle| + \|y\|^2$ jest nieujemna.

Czyli jej wyróżnik jest niedodatni: $\Delta =$

Def. Normę elementu x w przestrzeni unitarnej H definiujemy wzorem

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Lem. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re}\langle x, y \rangle + \|y\|^2$ dla $x, y \in H$



“Uogólniony wzór skróconego mnożenia”

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Tw. (Nierówność Schwartza)

Dla dowolnych wektorów x, y przestrzeni unitarnej zachodzi

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Dowód: Niech $\lambda \in \mathbb{F}$ takie, że $|\langle x, y \rangle| = \lambda \cdot \langle x, y \rangle$ oraz $|\lambda| = 1$ ($\lambda = e^{-i \arg \langle x, y \rangle}$). Dla każdego $t \in \mathbb{R}$ mamy

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle t\lambda x + y, t\lambda x + y \rangle &= \|t\lambda x\|^2 + 2 \operatorname{Re}\langle t\lambda x, y \rangle + \|y\|^2 \\ &= t^2 \|x\|^2 + 2t |\langle x, y \rangle| + \|y\|^2. \end{aligned}$$

Zatem funkcja $f(t) := t^2 \|x\|^2 + 2t |\langle x, y \rangle| + \|y\|^2$ jest nieujemna.

Czyli jej wyróżnik jest niedodatni: $\Delta = 4|\langle x, y \rangle|^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2$

Def. Normę elementu x w przestrzeni unitarnej H definiujemy wzorem

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Lem. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2$ dla $x, y \in H$



“Uogólniony wzór skróconego mnożenia”

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Tw. (Nierówność Schwartza)

Dla dowolnych wektorów x, y przestrzeni unitarnej zachodzi

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Dowód: Niech $\lambda \in \mathbb{F}$ takie, że $|\langle x, y \rangle| = \lambda \cdot \langle x, y \rangle$ oraz $|\lambda| = 1$ ($\lambda = e^{-i \arg \langle x, y \rangle}$). Dla każdego $t \in \mathbb{R}$ mamy

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle t\lambda x + y, t\lambda x + y \rangle = \|t\lambda x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle t\lambda x, y \rangle + \|y\|^2 \\ &= t^2 \|x\|^2 + 2t |\langle x, y \rangle| + \|y\|^2. \end{aligned}$$

Zatem funkcja $f(t) := t^2 \|x\|^2 + 2t |\langle x, y \rangle| + \|y\|^2$ jest nieujemna.

Czyli jej wyróżnik jest niedodatni: $\Delta = 4|\langle x, y \rangle|^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$.

Def. Normę elementu x w przestrzeni unitarnej H definiujemy wzorem

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Lem. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2$ dla $x, y \in H$



“Uogólniony wzór skróconego mnożenia”

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Tw. (Nierówność Schwartza)

Dla dowolnych wektorów x, y przestrzeni unitarnej zachodzi

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Dowód: Niech $\lambda \in \mathbb{F}$ takie, że $|\langle x, y \rangle| = \lambda \cdot \langle x, y \rangle$ oraz $|\lambda| = 1$ ($\lambda = e^{-i \arg \langle x, y \rangle}$). Dla każdego $t \in \mathbb{R}$ mamy

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle t\lambda x + y, t\lambda x + y \rangle &= \|t\lambda x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle t\lambda x, y \rangle + \|y\|^2 \\ &= t^2 \|x\|^2 + 2t |\langle x, y \rangle| + \|y\|^2. \end{aligned}$$

Zatem funkcja $f(t) := t^2 \|x\|^2 + 2t |\langle x, y \rangle| + \|y\|^2$ jest nieujemna.

Czyli jej wyróżnik jest niedodatni: $\Delta = 4|\langle x, y \rangle|^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$.

Po przekształceniach daje to

Def. Normę elementu x w przestrzeni unitarnej H definiujemy wzorem

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Lem. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re}\langle x, y \rangle + \|y\|^2$ dla $x, y \in H$



“Uogólniony wzór skróconego mnożenia”

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Tw. (Nierówność Schwartza)

Dla dowolnych wektorów x, y przestrzeni unitarnej zachodzi

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Dowód: Niech $\lambda \in \mathbb{F}$ takie, że $|\langle x, y \rangle| = \lambda \cdot \langle x, y \rangle$ oraz $|\lambda| = 1$ ($\lambda = e^{-i \arg \langle x, y \rangle}$). Dla każdego $t \in \mathbb{R}$ mamy

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle t\lambda x + y, t\lambda x + y \rangle = \|t\lambda x\|^2 + 2 \operatorname{Re}\langle t\lambda x, y \rangle + \|y\|^2 \\ &= t^2 \|x\|^2 + 2t |\langle x, y \rangle| + \|y\|^2. \end{aligned}$$

Zatem funkcja $f(t) := t^2 \|x\|^2 + 2t |\langle x, y \rangle| + \|y\|^2$ jest nieujemna.

Czyli jej wyróżnik jest niedodatni: $\Delta = 4|\langle x, y \rangle|^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$.

Po przekształceniach daje to $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

Def. Normę elementu x w przestrzeni unitarnej H definiujemy wzorem

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Lem. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re}\langle x, y \rangle + \|y\|^2$ dla $x, y \in H$



“Uogólniony wzór skróconego mnożenia”

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Tw. (Nierówność Schwartza)

Dla dowolnych wektorów x, y przestrzeni unitarnej zachodzi

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Dowód: Niech $\lambda \in \mathbb{F}$ takie, że $|\langle x, y \rangle| = \lambda \cdot \langle x, y \rangle$ oraz $|\lambda| = 1$ ($\lambda = e^{-i \arg \langle x, y \rangle}$). Dla każdego $t \in \mathbb{R}$ mamy

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle t\lambda x + y, t\lambda x + y \rangle = \|t\lambda x\|^2 + 2 \operatorname{Re}\langle t\lambda x, y \rangle + \|y\|^2 \\ &= t^2 \|x\|^2 + 2t |\langle x, y \rangle| + \|y\|^2. \end{aligned}$$

Zatem funkcja $f(t) := t^2 \|x\|^2 + 2t |\langle x, y \rangle| + \|y\|^2$ jest nieujemna.

Czyli jej wyróżnik jest niedodatni: $\Delta = 4|\langle x, y \rangle|^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$.

Po przekształceniach daje to $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

Wn. Funkcja $\| \cdot \| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$

Wn. Funkcja $\| \cdot \| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ jest normą na przestrzeni unitarnej.

Wn. Funkcja $\| \cdot \| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ jest normą na przestrzeni unitarnej.

Dowód:

Wn. Funkcja $\| \cdot \| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ jest normą na przestrzeni unitarnej.

Dowód: $\|x\| = 0$

Wn. Funkcja $\| \cdot \| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ jest normą na przestrzeni unitarnej.

Dowód: $\|x\| = 0 \iff \langle x, x \rangle = 0$

Wn. Funkcja $\| \cdot \| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ jest normą na przestrzeni unitarnej.

Dowód: $\|x\| = 0 \iff \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$.

Wn. Funkcja $\| \cdot \| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ jest normą na przestrzeni unitarnej.

Dowód: $\|x\| = 0 \iff \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$. Dla $\lambda \in \mathbb{F}$ mamy

Wn. Funkcja $\| \cdot \| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ jest normą na przestrzeni unitarnej.

Dowód: $\|x\| = 0 \iff \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$. Dla $\lambda \in \mathbb{F}$ mamy

$$\|\lambda x\|$$

Wn. Funkcja $\| \cdot \| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ jest normą na przestrzeni unitarnej.

Dowód: $\|x\| = 0 \iff \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$. Dla $\lambda \in \mathbb{F}$ mamy

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle}$$

Wn. Funkcja $\| \cdot \| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ jest normą na przestrzeni unitarnej.

Dowód: $\|x\| = 0 \iff \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$. Dla $\lambda \in \mathbb{F}$ mamy

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda \bar{\lambda} \langle x, x \rangle}$$

Wn. Funkcja $\| \cdot \| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ jest normą na przestrzeni unitarnej.

Dowód: $\|x\| = 0 \iff \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$. Dla $\lambda \in \mathbb{F}$ mamy

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda \bar{\lambda} \langle x, x \rangle} = \sqrt{|\lambda|^2 \langle x, x \rangle}$$

Wn. Funkcja $\| \cdot \| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ jest normą na przestrzeni unitarnej.

Dowód: $\|x\| = 0 \iff \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$. Dla $\lambda \in \mathbb{F}$ mamy

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda \bar{\lambda} \langle x, x \rangle} = \sqrt{|\lambda|^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \cdot \|x\|.$$

Wn. Funkcja $\| \cdot \| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ jest normą na przestrzeni unitarnej.

Dowód: $\|x\| = 0 \iff \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$. Dla $\lambda \in \mathbb{F}$ mamy

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda \bar{\lambda} \langle x, x \rangle} = \sqrt{|\lambda|^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \cdot \|x\|.$$

Dla $x, y \in H$ mamy

Wn. Funkcja $\| \cdot \| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ jest normą na przestrzeni unitarnej.

Dowód: $\|x\| = 0 \iff \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$. Dla $\lambda \in \mathbb{F}$ mamy

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda \bar{\lambda} \langle x, x \rangle} = \sqrt{|\lambda|^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \cdot \|x\|.$$

Dla $x, y \in H$ mamy

$$\|x + y\|^2 =$$

Wn. Funkcja $\| \cdot \| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ jest normą na przestrzeni unitarnej.

Dowód: $\|x\| = 0 \iff \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$. Dla $\lambda \in \mathbb{F}$ mamy

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda \bar{\lambda} \langle x, x \rangle} = \sqrt{|\lambda|^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \cdot \|x\|.$$

Dla $x, y \in H$ mamy

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

Wn. Funkcja $\|\cdot\| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ jest normą na przestrzeni unitarnej.

Dowód: $\|x\| = 0 \iff \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$. Dla $\lambda \in \mathbb{F}$ mamy

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda \bar{\lambda} \langle x, x \rangle} = \sqrt{|\lambda|^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \cdot \|x\|.$$

Dla $x, y \in H$ mamy

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \stackrel{\operatorname{Re} z \leq |z|}{\leq}$$

Wn. Funkcja $\|\cdot\| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ jest normą na przestrzeni unitarnej.

Dowód: $\|x\| = 0 \iff \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$. Dla $\lambda \in \mathbb{F}$ mamy

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda \bar{\lambda} \langle x, x \rangle} = \sqrt{|\lambda|^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \cdot \|x\|.$$

Dla $x, y \in H$ mamy

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \stackrel{\operatorname{Re} z \leq |z|}{\leq} \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2$$

Wn. Funkcja $\|\cdot\| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ jest normą na przestrzeni unitarnej.

Dowód: $\|x\| = 0 \iff \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$. Dla $\lambda \in \mathbb{F}$ mamy

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda \bar{\lambda} \langle x, x \rangle} = \sqrt{|\lambda|^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \cdot \|x\|.$$

Dla $x, y \in H$ mamy

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \stackrel{\operatorname{Re} z \leq |z|}{\leq} \|x\|^2 + 2 |\langle x, y \rangle| + \|y\|^2$$

Schwartz
 $\leq$

Wn. Funkcja $\|\cdot\| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ jest normą na przestrzeni unitarnej.

Dowód: $\|x\| = 0 \iff \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$. Dla $\lambda \in \mathbb{F}$ mamy

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda \bar{\lambda} \langle x, x \rangle} = \sqrt{|\lambda|^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \cdot \|x\|.$$

Dla $x, y \in H$ mamy

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \stackrel{\operatorname{Re} z \leq |z|}{\leq} \|x\|^2 + 2 |\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \\ &\stackrel{\text{Schwartz}}{\leq} \|x\|^2 + 2 \|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 \end{aligned}$$

Wn. Funkcja $\|\cdot\| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ jest normą na przestrzeni unitarnej.

Dowód: $\|x\| = 0 \iff \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$. Dla $\lambda \in \mathbb{F}$ mamy

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda \bar{\lambda} \langle x, x \rangle} = \sqrt{|\lambda|^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \cdot \|x\|.$$

Dla $x, y \in H$ mamy

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \stackrel{\operatorname{Re} z \leq |z|}{\leq} \|x\|^2 + 2 |\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \\ &\stackrel{\text{Schwartz}}{\leq} \|x\|^2 + 2 \|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Wn. Funkcja $\| \cdot \| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ jest normą na przestrzeni unitarnej.

Dowód: $\|x\| = 0 \iff \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$. Dla $\lambda \in \mathbb{F}$ mamy

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda \bar{\lambda} \langle x, x \rangle} = \sqrt{|\lambda|^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \cdot \|x\|.$$

Dla $x, y \in H$ mamy

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \stackrel{\operatorname{Re} z \leq |z|}{\leq} \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \\ &\stackrel{\text{Schwartz}}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Pierwiastkując otrzymujemy nierówność trójkąta.

Wn. Funkcja $\|\cdot\| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ jest normą na przestrzeni unitarnej.

Dowód: $\|x\| = 0 \iff \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$. Dla $\lambda \in \mathbb{F}$ mamy

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda \bar{\lambda} \langle x, x \rangle} = \sqrt{|\lambda|^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \cdot \|x\|.$$

Dla $x, y \in H$ mamy

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \stackrel{\operatorname{Re} z \leq |z|}{\leq} \|x\|^2 + 2 |\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \\ &\stackrel{\text{Schwartz}}{\leq} \|x\|^2 + 2 \|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Pierwiastkując otrzymujemy nierówność trójkąta. ■

Wn. Funkcja $\| \cdot \| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ jest normą na przestrzeni unitarnej.

Dowód: $\|x\| = 0 \iff \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$. Dla $\lambda \in \mathbb{F}$ mamy

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda \bar{\lambda} \langle x, x \rangle} = \sqrt{|\lambda|^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \cdot \|x\|.$$

Dla $x, y \in H$ mamy

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \stackrel{\operatorname{Re} z \leq |z|}{\leq} \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \\ &\stackrel{\text{Schwartz}}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Pierwiastkując otrzymujemy nierówność trójkąta. ■

Def. Przestrzeń Hilberta = przestrzeń unitarna,

Wn. Funkcja $\| \cdot \| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ jest normą na przestrzeni unitarnej.

Dowód: $\|x\| = 0 \iff \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$. Dla $\lambda \in \mathbb{F}$ mamy

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda \bar{\lambda} \langle x, x \rangle} = \sqrt{|\lambda|^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \cdot \|x\|.$$

Dla $x, y \in H$ mamy

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \stackrel{\operatorname{Re} z \leq |z|}{\leq} \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \\ &\stackrel{\text{Schwartz}}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Pierwiastkując otrzymujemy nierówność trójkąta. ■

Def. Przestrzeń Hilberta = przestrzeń unitarna, która jest zupełna w normie $\| \cdot \| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$.

Wn. Funkcja $\|\cdot\| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ jest normą na przestrzeni unitarnej.

Dowód: $\|x\| = 0 \iff \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$. Dla $\lambda \in \mathbb{F}$ mamy

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda \bar{\lambda} \langle x, x \rangle} = \sqrt{|\lambda|^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \cdot \|x\|.$$

Dla $x, y \in H$ mamy

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \stackrel{\operatorname{Re} z \leq |z|}{\leq} \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \\ &\stackrel{\text{Schwartz}}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Pierwiastkując otrzymujemy nierówność trójkąta. ■

Def. Przestrzeń Hilberta = przestrzeń unitarna, która jest zupełna w normie $\|\cdot\| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$.



Hilbert

Wn. Funkcja $\|\cdot\| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ jest normą na przestrzeni unitarnej.

Dowód: $\|x\| = 0 \iff \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$. Dla $\lambda \in \mathbb{F}$ mamy

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda \bar{\lambda} \langle x, x \rangle} = \sqrt{|\lambda|^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \cdot \|x\|.$$

Dla $x, y \in H$ mamy

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \stackrel{\operatorname{Re} z \leq |z|}{\leq} \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \\ &\stackrel{\text{Schwartz}}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Pierwiastkując otrzymujemy nierówność trójkąta. ■

Def. Przestrzeń Hilberta = przestrzeń unitarna, która jest zupełna w normie $\|\cdot\| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$.



Hilbert



Neumann

Wn. Funkcja $\|\cdot\| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ jest normą na przestrzeni unitarnej.

Dowód: $\|x\| = 0 \iff \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$. Dla $\lambda \in \mathbb{F}$ mamy

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda \bar{\lambda} \langle x, x \rangle} = \sqrt{|\lambda|^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \cdot \|x\|.$$

Dla $x, y \in H$ mamy

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \stackrel{\operatorname{Re} z \leq |z|}{\leq} \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \\ &\stackrel{\text{Schwartz}}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Pierwiastkując otrzymujemy nierówność trójkąta. ■

Def. Przestrzeń Hilberta = przestrzeń unitarna, która jest zupełna w normie $\|\cdot\| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$.



Uw. Iloczyn skalarny $\langle\cdot,\cdot\rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{F}$

Wn. Funkcja $\| \cdot \| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ jest normą na przestrzeni unitarnej.

Dowód: $\|x\| = 0 \iff \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$. Dla $\lambda \in \mathbb{F}$ mamy

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda \bar{\lambda} \langle x, x \rangle} = \sqrt{|\lambda|^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \cdot \|x\|.$$

Dla $x, y \in H$ mamy

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \stackrel{\operatorname{Re} z \leq |z|}{\leq} \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \\ &\stackrel{\text{Schwartz}}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Pierwiastkując otrzymujemy nierówność trójkąta. ■

Def. Przestrzeń Hilberta = przestrzeń unitarna, która jest zupełna w normie $\| \cdot \| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$.



Hilbert



Neumann

Uw. Iloczyn skalarny $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{F}$ jest funkcją ciągłą w normie, którą zadaje (wynika to z nierówności Schwartza).

Wn. Funkcja $\| \cdot \| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ jest normą na przestrzeni unitarnej.

Dowód: $\|x\| = 0 \iff \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$. Dla $\lambda \in \mathbb{F}$ mamy

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda \bar{\lambda} \langle x, x \rangle} = \sqrt{|\lambda|^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \cdot \|x\|.$$

Dla $x, y \in H$ mamy

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \stackrel{\operatorname{Re} z \leq |z|}{\leq} \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \\ &\stackrel{\text{Schwartz}}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Pierwiastkując otrzymujemy nierówność trójkąta. ■

Def. Przestrzeń Hilberta = przestrzeń unitarna, która jest zupełna w normie $\| \cdot \| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$.



Uw. Iloczyn skalarny $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{F}$ jest funkcją ciągłą w normie, którą zadaje (wynika to z nierówności Schwartza). W szczególności, przedłoża się on do uzupełnienia przestrzeni H .

Wn. Funkcja $\| \cdot \| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ jest normą na przestrzeni unitarnej.

Dowód: $\|x\| = 0 \iff \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$. Dla $\lambda \in \mathbb{F}$ mamy

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda \bar{\lambda} \langle x, x \rangle} = \sqrt{|\lambda|^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \cdot \|x\|.$$

Dla $x, y \in H$ mamy

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \stackrel{\operatorname{Re} z \leq |z|}{\leq} \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \\ &\stackrel{\text{Schwartz}}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Pierwiastkując otrzymujemy nierówność trójkąta. ■

Def. Przestrzeń Hilberta = przestrzeń unitarna, która jest zupełna w normie $\| \cdot \| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$.



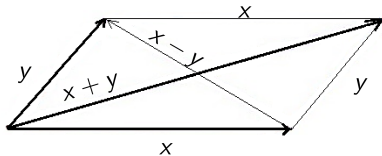
Uw. Iloczyn skalarny $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{F}$ jest funkcją ciągłą w normie, którą zadaje (wynika to z nierówności Schwartza). W szczególności, przedłoża się on do uzupełnienia przestrzeni H . Zatem **uzupełnienie przestrzeni unitarnej jest przestrzenią Hilberta!**

Tożsamość równoległoboku mówi, że:

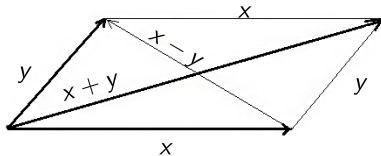
Tożsamość równoległoboku mówi, że:
*suma kwadratów długości boków w
równoległoboku jest równa*

Tożsamość równoległoboku mówi, że:
*suma kwadratów długości boków w
równoległoboku jest równa sumie
kwadratów długości przekątnych*

Tożsamość równoległoboku mówi, że
*suma kwadratów długości boków w
równoległoboku jest równa sumie
kwadratów długości przekątnych*



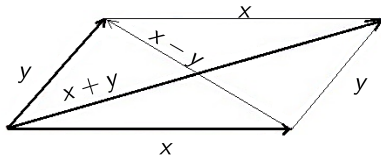
Tożsamość równoległoboku mówi, że
*suma kwadratów długości boków w
równoległoboku jest równa sumie
kwadratów długości przekątnych*



Twierdzenie.

W każdej przestrzeni unitarnej zachodzi **tożsamość równoległoboku**:

Tożsamość równoległoboku mówi, że *suma kwadratów długości boków w równoległoboku jest równa sumie kwadratów długości przekątnych*

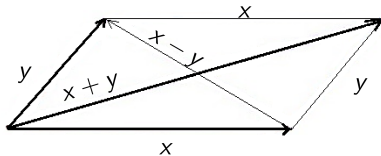


Twierdzenie.

W każdej przestrzeni unitarnej zachodzi **tożsamość równoległoboku**:

$$\forall_{x,y \in H} \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Tożsamość równoległoboku mówi, że *suma kwadratów długości boków w równoległoboku jest równa sumie kwadratów długości przekątnych*



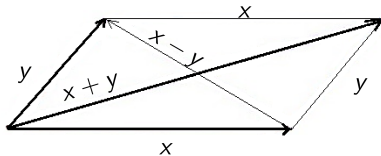
Twierdzenie.

W każdej przestrzeni unitarnej zachodzi **tożsamość równoległoboku**:

$$\forall_{x,y \in H} \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

oraz iloczyn skalarny jest jednoznacznie wyznaczony przez normę **wzorem polaryzacyjnym**:

Tożsamość równoległoboku mówi, że suma kwadratów długości boków w równoległoboku jest równa sumie kwadratów długości przekątnych



Twierdzenie.

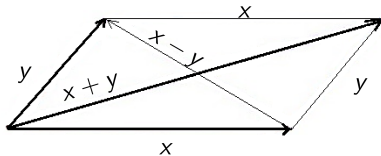
W każdej przestrzeni unitarnej zachodzi **tożsamość równoległoboku**:

$$\forall_{x,y \in H} \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2 (\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

oraz iloczyn skalarny jest jednoznacznie wyznaczony przez normę wzorem **polaryzacyjnym**:

$$\langle x, y \rangle = \begin{cases} \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2), & \text{gdy } \mathbb{F} = \mathbb{R}, \\ \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k \|x + i^k y\|^2, & \text{gdy } \mathbb{F} = \mathbb{C}. \end{cases}$$

Tożsamość równoległoboku mówi, że *suma kwadratów długości boków w równoległoboku jest równa sumie kwadratów długości przekątnych*



Twierdzenie.

W każdej przestrzeni unitarnej zachodzi **tożsamość równoległoboku**:

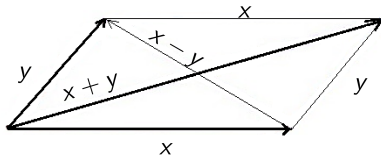
$$\forall_{x,y \in H} \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2 (\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

oraz iloczyn skalarny jest jednoznacznie wyznaczony przez normę **wzorem polaryzacyjnym**:

$$\langle x, y \rangle = \begin{cases} \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2), & \text{gdy } \mathbb{F} = \mathbb{R}, \\ \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k \|x + i^k y\|^2, & \text{gdy } \mathbb{F} = \mathbb{C}. \end{cases}$$

Na odwrót, jeśli $(H, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią unormowaną,

Tożsamość równoległoboku mówi, że suma kwadratów długości boków w równoległoboku jest równa sumie kwadratów długości przekątnych



Twierdzenie.

W każdej przestrzeni unitarnej zachodzi **tożsamość równoległoboku**:

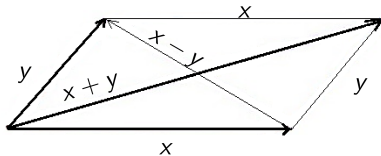
$$\forall_{x,y \in H} \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

oraz iloczyn skalarny jest jednoznacznie wyznaczony przez normę wzorem **polaryzacyjnym**:

$$\langle x, y \rangle = \begin{cases} \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2), & \text{gdy } \mathbb{F} = \mathbb{R}, \\ \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k \|x + i^k y\|^2, & \text{gdy } \mathbb{F} = \mathbb{C}. \end{cases}$$

Na odwrót, jeśli $(H, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią unormowaną, w której spełniona jest tożsamość równoległoboku,

Tożsamość równoległoboku mówi, że *suma kwadratów długości boków w równoległoboku jest równa sumie kwadratów długości przekątnych*



Twierdzenie.

W każdej przestrzeni unitarnej zachodzi **tożsamość równoległoboku**:

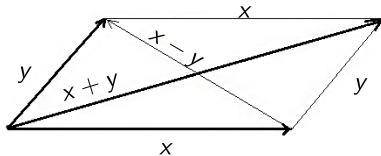
$$\forall_{x,y \in H} \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

oraz iloczyn skalarny jest jednoznacznie wyznaczony przez normę **wzorem polaryzacyjnym**:

$$\langle x, y \rangle = \begin{cases} \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2), & \text{gdy } \mathbb{F} = \mathbb{R}, \\ \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k \|x + i^k y\|^2, & \text{gdy } \mathbb{F} = \mathbb{C}. \end{cases}$$

Na odwrót, jeśli $(H, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią unormowaną, w której spełniona jest tożsamość równoległoboku, to wzór polaryzacyjny zadaje iloczyn skalarny na H taki, że $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

Tożsamość równoległoboku mówi, że suma kwadratów długości boków w równoległoboku jest równa sumie kwadratów długości przekątnych



Twierdzenie.

W każdej przestrzeni unitarnej zachodzi **tożsamość równoległoboku**:

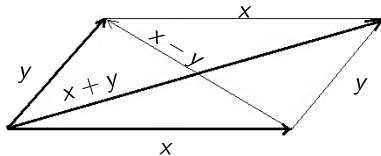
$$\forall_{x,y \in H} \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

oraz iloczyn skalarny jest jednoznacznie wyznaczony przez normę wzorem **polaryzacyjnym**:

$$\langle x, y \rangle = \begin{cases} \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2), & \text{gdy } \mathbb{F} = \mathbb{R}, \\ \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k \|x + i^k y\|^2, & \text{gdy } \mathbb{F} = \mathbb{C}. \end{cases}$$

Na odwrót, jeśli $(H, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią unormowaną, w której spełniona jest tożsamość równoległoboku, to wzór polaryzacyjny zadaje iloczyn skalarny na H taki, że $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, czyli H jest unitarna.

Tożsamość równoległoboku mówi, że suma kwadratów długości boków w równoległoboku jest równa sumie kwadratów długości przekątnych



Twierdzenie.

W każdej przestrzeni unitarnej zachodzi **tożsamość równoległoboku**:

$$\forall_{x,y \in H} \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2 (\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

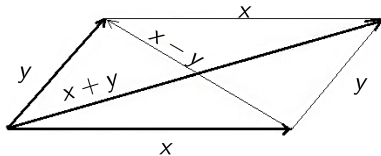
oraz iloczyn skalarny jest jednoznacznie wyznaczony przez normę **wzorem polaryzacyjnym**:

$$\langle x, y \rangle = \begin{cases} \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2), & \text{gdy } \mathbb{F} = \mathbb{R}, \\ \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k \|x + i^k y\|^2, & \text{gdy } \mathbb{F} = \mathbb{C}. \end{cases}$$

Na odwrót, jeśli $(H, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią unormowaną, w której spełniona jest tożsamość równoległoboku, to wzór polaryzacyjny zadaje iloczyn skalarny na H taki, że $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, czyli H jest unitarna.

Dowód:

Tożsamość równoległoboku mówi, że suma kwadratów długości boków w równoległoboku jest równa sumie kwadratów długości przekątnych



Twierdzenie.

W każdej przestrzeni unitarnej zachodzi **tożsamość równoległoboku**:

$$\forall_{x,y \in H} \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2 (\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

oraz iloczyn skalarny jest jednoznacznie wyznaczony przez normę **wzorem polaryzacyjnym**:

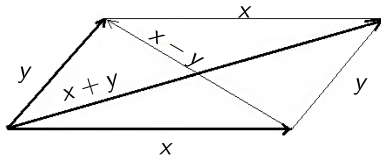
$$\langle x, y \rangle = \begin{cases} \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2), & \text{gdy } \mathbb{F} = \mathbb{R}, \\ \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k \|x + i^k y\|^2, & \text{gdy } \mathbb{F} = \mathbb{C}. \end{cases}$$

Na odwrót, jeśli $(H, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią unormowaną, w której spełniona jest tożsamość równoległoboku, to wzór polaryzacyjny zadaje iloczyn skalarny na H taki, że $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, czyli H jest unitarna.

Dowód: $\Rightarrow$



Tożsamość równoległoboku mówi, że suma kwadratów długości boków w równoległoboku jest równa sumie kwadratów długości przekątnych



Twierdzenie.

W każdej przestrzeni unitarnej zachodzi **tożsamość równoległoboku**:

$$\forall_{x,y \in H} \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2 (\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

oraz iloczyn skalarny jest jednoznacznie wyznaczony przez normę **wzorem polaryzacyjnym**:

$$\langle x, y \rangle = \begin{cases} \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2), & \text{gdy } \mathbb{F} = \mathbb{R}, \\ \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k \|x + i^k y\|^2, & \text{gdy } \mathbb{F} = \mathbb{C}. \end{cases}$$

Na odwrót, jeśli $(H, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią unormowaną, w której spełniona jest tożsamość równoległoboku, to wzór polaryzacyjny zadaje iloczyn skalarny na H taki, że $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, czyli H jest unitarna.



Dowód: ' $\Rightarrow$ ' dla bardziej ambitnych.

Wn. Przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Hilberta

Wn. Przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy

Wn. Przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy norma $\|\cdot\|$ spełnia tożsamość równoległoboku.

Wn. Przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy norma $\|\cdot\|$ spełnia tożsamość równoległoboku.

Prz. Przestrzeń $L^p(\mu)$, $p \geq 1$, dla dowolnej przestrzeni z miarą (Ω, Σ, μ) ,

Wn. Przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy norma $\|\cdot\|$ spełnia tożsamość równoległoboku.

Prz. Przestrzeń $L^p(\mu)$, $p \geq 1$, dla dowolnej przestrzeni z miarą (Ω, Σ, μ) , jest przestrzenią Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy

Wn. Przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy norma $\|\cdot\|$ spełnia tożsamość równoległoboku.

Prz. Przestrzeń $L^p(\mu)$, $p \geq 1$, dla dowolnej przestrzeni z miarą (Ω, Σ, μ) , jest przestrzenią Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy $p = 2$.

Wn. Przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy norma $\|\cdot\|$ spełnia tożsamość równoległoboku.

Prz. Przestrzeń $L^p(\mu)$, $p \geq 1$, dla dowolnej przestrzeni z miarą (Ω, Σ, μ) , jest przestrzenią Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy $p = 2$.

Wiemy, że $L^2(\mu)$ to przestrzeń Hilberta, gdzie

Wn. Przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy norma $\|\cdot\|$ spełnia tożsamość równoległoboku.

Prz. Przestrzeń $L^p(\mu)$, $p \geq 1$, dla dowolnej przestrzeni z miarą (Ω, Σ, μ) , jest przestrzenią Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy $p = 2$.

Wiemy, że $L^2(\mu)$ to przestrzeń Hilberta, gdzie $\langle x, y \rangle = \int x \cdot \bar{y} d\mu$.

Wn. Przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy norma $\|\cdot\|$ spełnia tożsamość równoległoboku.

Prz. Przestrzeń $L^p(\mu)$, $p \geq 1$, dla dowolnej przestrzeni z miarą (Ω, Σ, μ) , jest przestrzenią Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy $p = 2$.

Wiemy, że $L^2(\mu)$ to przestrzeń Hilberta, gdzie $\langle x, y \rangle = \int x \cdot \bar{y} d\mu$.
Założmy, że w $L^p(\mu)$ jest spełniona tożsamość równoległoboku.

Wn. Przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy norma $\|\cdot\|$ spełnia tożsamość równoległoboku.

Prz. Przestrzeń $L^p(\mu)$, $p \geq 1$, dla dowolnej przestrzeni z miarą (Ω, Σ, μ) , jest przestrzenią Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy $p = 2$.

Wiemy, że $L^2(\mu)$ to przestrzeń Hilberta, gdzie $\langle x, y \rangle = \int x \cdot \bar{y} d\mu$.

Założmy, że w $L^p(\mu)$ jest spełniona tożsamość równoległoboku. Weźmy zbiory rozłączne $A, B \in \Sigma$ takie, że $0 < \mu(A), \mu(B) < \infty$.

Wn. Przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy norma $\|\cdot\|$ spełnia tożsamość równoległoboku.

Prz. Przestrzeń $L^p(\mu)$, $p \geq 1$, dla dowolnej przestrzeni z miarą (Ω, Σ, μ) , jest przestrzenią Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy $p = 2$.

Wiemy, że $L^2(\mu)$ to przestrzeń Hilberta, gdzie $\langle x, y \rangle = \int x \cdot \bar{y} d\mu$.

Założmy, że w $L^p(\mu)$ jest spełniona tożsamość równoległoboku. Weźmy zbiory rozłączne $A, B \in \Sigma$ takie, że $0 < \mu(A), \mu(B) < \infty$. Kładąc $x := \mathbb{1}_A$ i $y = \mathbb{1}_B$ mamy

Wn. Przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy norma $\|\cdot\|$ spełnia tożsamość równoległoboku.

Prz. Przestrzeń $L^p(\mu)$, $p \geq 1$, dla dowolnej przestrzeni z miarą (Ω, Σ, μ) , jest przestrzenią Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy $p = 2$.

Wiemy, że $L^2(\mu)$ to przestrzeń Hilberta, gdzie $\langle x, y \rangle = \int x \cdot \bar{y} d\mu$.

Założmy, że w $L^p(\mu)$ jest spełniona tożsamość równoległoboku. Weźmy zbiory rozłączne $A, B \in \Sigma$ takie, że $0 < \mu(A), \mu(B) < \infty$. Kładąc $x := \mathbb{1}_A$ i $y = \mathbb{1}_B$ mamy

$$\|x + y\|_p^2 + \|x - y\|_p^2 =$$

Wn. Przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy norma $\|\cdot\|$ spełnia tożsamość równoległoboku.

Prz. Przestrzeń $L^p(\mu)$, $p \geq 1$, dla dowolnej przestrzeni z miarą (Ω, Σ, μ) , jest przestrzenią Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy $p = 2$.

Wiemy, że $L^2(\mu)$ to przestrzeń Hilberta, gdzie $\langle x, y \rangle = \int x \cdot \bar{y} d\mu$.

Założmy, że w $L^p(\mu)$ jest spełniona tożsamość równoległoboku. Weźmy zbiory rozłączne $A, B \in \Sigma$ takie, że $0 < \mu(A), \mu(B) < \infty$. Kładąc $x := \mathbb{1}_A$ i $y = \mathbb{1}_B$ mamy

$$\|x + y\|_p^2 + \|x - y\|_p^2 = 2\mu(A \cup B)^{\frac{2}{p}},$$

Wn. Przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy norma $\|\cdot\|$ spełnia tożsamość równoległoboku.

Prz. Przestrzeń $L^p(\mu)$, $p \geq 1$, dla dowolnej przestrzeni z miarą (Ω, Σ, μ) , jest przestrzenią Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy $p = 2$.

Wiemy, że $L^2(\mu)$ to przestrzeń Hilberta, gdzie $\langle x, y \rangle = \int x \cdot \bar{y} d\mu$.

Założmy, że w $L^p(\mu)$ jest spełniona tożsamość równoległoboku. Weźmy zbiory rozłączne $A, B \in \Sigma$ takie, że $0 < \mu(A), \mu(B) < \infty$. Kładąc $x := \mathbb{1}_A$ i $y = \mathbb{1}_B$ mamy

$$\|x + y\|_p^2 + \|x - y\|_p^2 = 2\mu(A \cup B)^{\frac{2}{p}},$$

$$2 (\|x\|_p^2 + \|y\|_p^2) =$$

Wn. Przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy norma $\|\cdot\|$ spełnia tożsamość równoległoboku.

Prz. Przestrzeń $L^p(\mu)$, $p \geq 1$, dla dowolnej przestrzeni z miarą (Ω, Σ, μ) , jest przestrzenią Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy $p = 2$.

Wiemy, że $L^2(\mu)$ to przestrzeń Hilberta, gdzie $\langle x, y \rangle = \int x \cdot \bar{y} d\mu$.

Założmy, że w $L^p(\mu)$ jest spełniona tożsamość równoległoboku. Weźmy zbiory rozłączne $A, B \in \Sigma$ takie, że $0 < \mu(A), \mu(B) < \infty$. Kładąc $x := \mathbb{1}_A$ i $y = \mathbb{1}_B$ mamy

$$\begin{aligned}\|x + y\|_p^2 + \|x - y\|_p^2 &= 2\mu(A \cup B)^{\frac{2}{p}}, \\ 2(\|x\|_p^2 + \|y\|_p^2) &= 2\left(\mu(A)^{\frac{2}{p}} + \mu(B)^{\frac{2}{p}}\right).\end{aligned}$$

Wn. Przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy norma $\|\cdot\|$ spełnia tożsamość równoległoboku.

Prz. Przestrzeń $L^p(\mu)$, $p \geq 1$, dla dowolnej przestrzeni z miarą (Ω, Σ, μ) , jest przestrzenią Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy $p = 2$.

Wiemy, że $L^2(\mu)$ to przestrzeń Hilberta, gdzie $\langle x, y \rangle = \int x \cdot \bar{y} d\mu$.

Założmy, że w $L^p(\mu)$ jest spełniona tożsamość równoległoboku. Weźmy zbiory rozłączne $A, B \in \Sigma$ takie, że $0 < \mu(A), \mu(B) < \infty$. Kładąc $x := \mathbb{1}_A$ i $y = \mathbb{1}_B$ mamy

$$\|x + y\|_p^2 + \|x - y\|_p^2 = 2\mu(A \cup B)^{\frac{2}{p}},$$

$$2(\|x\|_p^2 + \|y\|_p^2) = 2\left(\mu(A)^{\frac{2}{p}} + \mu(B)^{\frac{2}{p}}\right).$$

Dzieląc obustronnie mamy $1 = \left(\frac{\mu(A)}{\mu(A \cup B)}\right)^{\frac{2}{p}} + \left(\frac{\mu(B)}{\mu(A \cup B)}\right)^{\frac{2}{p}}$.

Wn. Przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy norma $\|\cdot\|$ spełnia tożsamość równoległoboku.

Prz. Przestrzeń $L^p(\mu)$, $p \geq 1$, dla dowolnej przestrzeni z miarą (Ω, Σ, μ) , jest przestrzenią Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy $p = 2$.

Wiemy, że $L^2(\mu)$ to przestrzeń Hilberta, gdzie $\langle x, y \rangle = \int x \cdot \bar{y} d\mu$.
Załóżmy, że w $L^p(\mu)$ jest spełniona tożsamość równoległoboku. Weźmy zbiory rozłączne $A, B \in \Sigma$ takie, że $0 < \mu(A), \mu(B) < \infty$. Kładąc $x := \mathbb{1}_A$ i $y = \mathbb{1}_B$ mamy

$$\begin{aligned}\|x + y\|_p^2 + \|x - y\|_p^2 &= 2\mu(A \cup B)^{\frac{2}{p}}, \\ 2(\|x\|_p^2 + \|y\|_p^2) &= 2\left(\mu(A)^{\frac{2}{p}} + \mu(B)^{\frac{2}{p}}\right).\end{aligned}$$

Dzieląc obustronnie mamy $1 = \left(\frac{\mu(A)}{\mu(A \cup B)}\right)^{\frac{2}{p}} + \left(\frac{\mu(B)}{\mu(A \cup B)}\right)^{\frac{2}{p}}$. Czyli kładąc $\lambda_1 := \frac{\mu(A)}{\mu(A \cup B)}$ oraz $\lambda_2 := \frac{\mu(B)}{\mu(A \cup B)}$

Wn. Przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy norma $\|\cdot\|$ spełnia tożsamość równoległoboku.

Prz. Przestrzeń $L^p(\mu)$, $p \geq 1$, dla dowolnej przestrzeni z miarą (Ω, Σ, μ) , jest przestrzenią Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy $p = 2$.

Wiemy, że $L^2(\mu)$ to przestrzeń Hilberta, gdzie $\langle x, y \rangle = \int x \cdot \bar{y} d\mu$.
Załóżmy, że w $L^p(\mu)$ jest spełniona tożsamość równoległoboku. Weźmy zbiory rozłączne $A, B \in \Sigma$ takie, że $0 < \mu(A), \mu(B) < \infty$. Kładąc $x := \mathbb{1}_A$ i $y = \mathbb{1}_B$ mamy

$$\begin{aligned}\|x + y\|_p^2 + \|x - y\|_p^2 &= 2\mu(A \cup B)^{\frac{2}{p}}, \\ 2(\|x\|_p^2 + \|y\|_p^2) &= 2\left(\mu(A)^{\frac{2}{p}} + \mu(B)^{\frac{2}{p}}\right).\end{aligned}$$

Dzieląc obustronnie mamy $1 = \left(\frac{\mu(A)}{\mu(A \cup B)}\right)^{\frac{2}{p}} + \left(\frac{\mu(B)}{\mu(A \cup B)}\right)^{\frac{2}{p}}$. Czyli kładąc $\lambda_1 := \frac{\mu(A)}{\mu(A \cup B)}$ oraz $\lambda_2 := \frac{\mu(B)}{\mu(A \cup B)}$ dostajemy liczby takie, że

Wn. Przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy norma $\|\cdot\|$ spełnia tożsamość równoległoboku.

Prz. Przestrzeń $L^p(\mu)$, $p \geq 1$, dla dowolnej przestrzeni z miarą (Ω, Σ, μ) , jest przestrzenią Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy $p = 2$.

Wiemy, że $L^2(\mu)$ to przestrzeń Hilberta, gdzie $\langle x, y \rangle = \int x \cdot \bar{y} d\mu$. Załóżmy, że w $L^p(\mu)$ jest spełniona tożsamość równoległoboku. Weźmy zbiory rozłączne $A, B \in \Sigma$ takie, że $0 < \mu(A), \mu(B) < \infty$. Kładąc $x := \mathbb{1}_A$ i $y = \mathbb{1}_B$ mamy

$$\begin{aligned}\|x + y\|_p^2 + \|x - y\|_p^2 &= 2\mu(A \cup B)^{\frac{2}{p}}, \\ 2(\|x\|_p^2 + \|y\|_p^2) &= 2\left(\mu(A)^{\frac{2}{p}} + \mu(B)^{\frac{2}{p}}\right).\end{aligned}$$

Dzieląc obustronnie mamy $1 = \left(\frac{\mu(A)}{\mu(A \cup B)}\right)^{\frac{2}{p}} + \left(\frac{\mu(B)}{\mu(A \cup B)}\right)^{\frac{2}{p}}$. Czyli kładąc $\lambda_1 := \frac{\mu(A)}{\mu(A \cup B)}$ oraz $\lambda_2 := \frac{\mu(B)}{\mu(A \cup B)}$ dostajemy liczby takie, że

$$0 < \lambda_1, \lambda_2 < 1,$$

Wn. Przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy norma $\|\cdot\|$ spełnia tożsamość równoległoboku.

Prz. Przestrzeń $L^p(\mu)$, $p \geq 1$, dla dowolnej przestrzeni z miarą (Ω, Σ, μ) , jest przestrzenią Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy $p = 2$.

Wiemy, że $L^2(\mu)$ to przestrzeń Hilberta, gdzie $\langle x, y \rangle = \int x \cdot \bar{y} d\mu$. Załóżmy, że w $L^p(\mu)$ jest spełniona tożsamość równoległoboku. Weźmy zbiory rozłączne $A, B \in \Sigma$ takie, że $0 < \mu(A), \mu(B) < \infty$. Kładąc $x := \mathbb{1}_A$ i $y = \mathbb{1}_B$ mamy

$$\begin{aligned}\|x + y\|_p^2 + \|x - y\|_p^2 &= 2\mu(A \cup B)^{\frac{2}{p}}, \\ 2(\|x\|_p^2 + \|y\|_p^2) &= 2\left(\mu(A)^{\frac{2}{p}} + \mu(B)^{\frac{2}{p}}\right).\end{aligned}$$

Dzieląc obustronnie mamy $1 = \left(\frac{\mu(A)}{\mu(A \cup B)}\right)^{\frac{2}{p}} + \left(\frac{\mu(B)}{\mu(A \cup B)}\right)^{\frac{2}{p}}$. Czyli kładąc $\lambda_1 := \frac{\mu(A)}{\mu(A \cup B)}$ oraz $\lambda_2 := \frac{\mu(B)}{\mu(A \cup B)}$ dostajemy liczby takie, że

$$0 < \lambda_1, \lambda_2 < 1, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

Wn. Przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy norma $\|\cdot\|$ spełnia tożsamość równoległoboku.

Prz. Przestrzeń $L^p(\mu)$, $p \geq 1$, dla dowolnej przestrzeni z miarą (Ω, Σ, μ) , jest przestrzenią Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy $p = 2$.

Wiemy, że $L^2(\mu)$ to przestrzeń Hilberta, gdzie $\langle x, y \rangle = \int x \cdot \bar{y} d\mu$. Załóżmy, że w $L^p(\mu)$ jest spełniona tożsamość równoległoboku. Weźmy zbiory rozłączne $A, B \in \Sigma$ takie, że $0 < \mu(A), \mu(B) < \infty$. Kładąc $x := \mathbb{1}_A$ i $y = \mathbb{1}_B$ mamy

$$\begin{aligned}\|x + y\|_p^2 + \|x - y\|_p^2 &= 2\mu(A \cup B)^{\frac{2}{p}}, \\ 2(\|x\|_p^2 + \|y\|_p^2) &= 2\left(\mu(A)^{\frac{2}{p}} + \mu(B)^{\frac{2}{p}}\right).\end{aligned}$$

Dzieląc obustronnie mamy $1 = \left(\frac{\mu(A)}{\mu(A \cup B)}\right)^{\frac{2}{p}} + \left(\frac{\mu(B)}{\mu(A \cup B)}\right)^{\frac{2}{p}}$. Czyli kładąc $\lambda_1 := \frac{\mu(A)}{\mu(A \cup B)}$ oraz $\lambda_2 := \frac{\mu(B)}{\mu(A \cup B)}$ dostajemy liczby takie, że

$$0 < \lambda_1, \lambda_2 < 1, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1 = (\lambda_1)^{\frac{2}{p}} + (\lambda_2)^{\frac{2}{p}}.$$

Wn. Przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy norma $\|\cdot\|$ spełnia tożsamość równoległoboku.

Prz. Przestrzeń $L^p(\mu)$, $p \geq 1$, dla dowolnej przestrzeni z miarą (Ω, Σ, μ) , jest przestrzenią Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy $p = 2$.

Wiemy, że $L^2(\mu)$ to przestrzeń Hilberta, gdzie $\langle x, y \rangle = \int x \cdot \bar{y} d\mu$. Załóżmy, że w $L^p(\mu)$ jest spełniona tożsamość równoległoboku. Weźmy zbiory rozłączne $A, B \in \Sigma$ takie, że $0 < \mu(A), \mu(B) < \infty$. Kładąc $x := \mathbb{1}_A$ i $y = \mathbb{1}_B$ mamy

$$\begin{aligned}\|x + y\|_p^2 + \|x - y\|_p^2 &= 2\mu(A \cup B)^{\frac{2}{p}}, \\ 2(\|x\|_p^2 + \|y\|_p^2) &= 2\left(\mu(A)^{\frac{2}{p}} + \mu(B)^{\frac{2}{p}}\right).\end{aligned}$$

Dzieląc obustronnie mamy $1 = \left(\frac{\mu(A)}{\mu(A \cup B)}\right)^{\frac{2}{p}} + \left(\frac{\mu(B)}{\mu(A \cup B)}\right)^{\frac{2}{p}}$. Czyli kładąc $\lambda_1 := \frac{\mu(A)}{\mu(A \cup B)}$ oraz $\lambda_2 := \frac{\mu(B)}{\mu(A \cup B)}$ dostajemy liczby takie, że

$$0 < \lambda_1, \lambda_2 < 1, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1 = (\lambda_1)^{\frac{2}{p}} + (\lambda_2)^{\frac{2}{p}}.$$

Te relacje mogą zachodzić tylko wtedy, gdy $p = 2$,

Wn. Przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy norma $\|\cdot\|$ spełnia tożsamość równoległoboku.

Prz. Przestrzeń $L^p(\mu)$, $p \geq 1$, dla dowolnej przestrzeni z miarą (Ω, Σ, μ) , jest przestrzenią Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy $p = 2$.

Wiemy, że $L^2(\mu)$ to przestrzeń Hilberta, gdzie $\langle x, y \rangle = \int x \cdot \bar{y} d\mu$. Załóżmy, że w $L^p(\mu)$ jest spełniona tożsamość równoległoboku. Weźmy zbiory rozłączne $A, B \in \Sigma$ takie, że $0 < \mu(A), \mu(B) < \infty$. Kładąc $x := \mathbb{1}_A$ i $y = \mathbb{1}_B$ mamy

$$\begin{aligned}\|x + y\|_p^2 + \|x - y\|_p^2 &= 2\mu(A \cup B)^{\frac{2}{p}}, \\ 2(\|x\|_p^2 + \|y\|_p^2) &= 2\left(\mu(A)^{\frac{2}{p}} + \mu(B)^{\frac{2}{p}}\right).\end{aligned}$$

Dzieląc obustronnie mamy $1 = \left(\frac{\mu(A)}{\mu(A \cup B)}\right)^{\frac{2}{p}} + \left(\frac{\mu(B)}{\mu(A \cup B)}\right)^{\frac{2}{p}}$. Czyli kładąc $\lambda_1 := \frac{\mu(A)}{\mu(A \cup B)}$ oraz $\lambda_2 := \frac{\mu(B)}{\mu(A \cup B)}$ dostajemy liczby takie, że

$$0 < \lambda_1, \lambda_2 < 1, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1 = (\lambda_1)^{\frac{2}{p}} + (\lambda_2)^{\frac{2}{p}}.$$

Te relacje mogą zachodzić tylko wtedy, gdy $p = 2$, gdyż jeśli $p < 2$ to $\lambda_i > (\lambda_i)^{\frac{2}{p}}$,

Wn. Przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy norma $\|\cdot\|$ spełnia tożsamość równoległoboku.

Prz. Przestrzeń $L^p(\mu)$, $p \geq 1$, dla dowolnej przestrzeni z miarą (Ω, Σ, μ) , jest przestrzenią Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy $p = 2$.

Wiemy, że $L^2(\mu)$ to przestrzeń Hilberta, gdzie $\langle x, y \rangle = \int x \cdot \bar{y} d\mu$. Załóżmy, że w $L^p(\mu)$ jest spełniona tożsamość równoległoboku. Weźmy zbiory rozłączne $A, B \in \Sigma$ takie, że $0 < \mu(A), \mu(B) < \infty$. Kładąc $x := \mathbb{1}_A$ i $y = \mathbb{1}_B$ mamy

$$\begin{aligned}\|x + y\|_p^2 + \|x - y\|_p^2 &= 2\mu(A \cup B)^{\frac{2}{p}}, \\ 2(\|x\|_p^2 + \|y\|_p^2) &= 2\left(\mu(A)^{\frac{2}{p}} + \mu(B)^{\frac{2}{p}}\right).\end{aligned}$$

Dzieląc obustronnie mamy $1 = \left(\frac{\mu(A)}{\mu(A \cup B)}\right)^{\frac{2}{p}} + \left(\frac{\mu(B)}{\mu(A \cup B)}\right)^{\frac{2}{p}}$. Czyli kładąc $\lambda_1 := \frac{\mu(A)}{\mu(A \cup B)}$ oraz $\lambda_2 := \frac{\mu(B)}{\mu(A \cup B)}$ dostajemy liczby takie, że

$$0 < \lambda_1, \lambda_2 < 1, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1 = (\lambda_1)^{\frac{2}{p}} + (\lambda_2)^{\frac{2}{p}}.$$

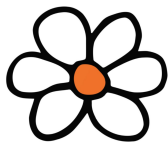
Te relacje mogą zachodzić tylko wtedy, gdy $p = 2$, gdyż jeśli $p < 2$ to $\lambda_i > (\lambda_i)^{\frac{2}{p}}$, a jeśli $p > 2$ to $\lambda_i < (\lambda_i)^{\frac{2}{p}}$ dla $i = 1, 2$.

Wn. Przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy norma $\|\cdot\|$ spełnia tożsamość równoległoboku.

Prz. Przestrzeń $L^p(\mu)$, $p \geq 1$, dla dowolnej przestrzeni z miarą (Ω, Σ, μ) , jest przestrzenią Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy $p = 2$.

Wiemy, że $L^2(\mu)$ to przestrzeń Hilberta, gdzie $\langle x, y \rangle = \int x \cdot \bar{y} d\mu$. Załóżmy, że w $L^p(\mu)$ jest spełniona tożsamość równoległoboku. Weźmy zbiory rozłączne $A, B \in \Sigma$ takie, że $0 < \mu(A), \mu(B) < \infty$. Kładąc $x := \mathbb{1}_A$ i $y = \mathbb{1}_B$ mamy

$$\begin{aligned}\|x + y\|_p^2 + \|x - y\|_p^2 &= 2\mu(A \cup B)^{\frac{2}{p}}, \\ 2(\|x\|_p^2 + \|y\|_p^2) &= 2\left(\mu(A)^{\frac{2}{p}} + \mu(B)^{\frac{2}{p}}\right).\end{aligned}$$



Dzieląc obustronnie mamy $1 = \left(\frac{\mu(A)}{\mu(A \cup B)}\right)^{\frac{2}{p}} + \left(\frac{\mu(B)}{\mu(A \cup B)}\right)^{\frac{2}{p}}$. Czyli kładąc $\lambda_1 := \frac{\mu(A)}{\mu(A \cup B)}$ oraz $\lambda_2 := \frac{\mu(B)}{\mu(A \cup B)}$ dostajemy liczby takie, że

$$0 < \lambda_1, \lambda_2 < 1, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1 = (\lambda_1)^{\frac{2}{p}} + (\lambda_2)^{\frac{2}{p}}.$$

Te relacje mogą zachodzić tylko wtedy, gdy $p = 2$, gdyż jeśli $p < 2$ to $\lambda_i > (\lambda_i)^{\frac{2}{p}}$, a jeśli $p > 2$ to $\lambda_i < (\lambda_i)^{\frac{2}{p}}$ dla $i = 1, 2$.